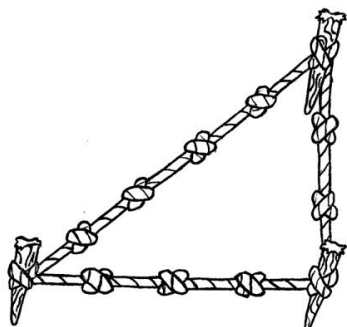


Το Πυθαγόρειο Θεώρημα

«Εν τοις ορθογώνιοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις». Δηλαδή:

«Το τετράγωνο της υποτεινούσας ενός ορθογώνιου τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του».

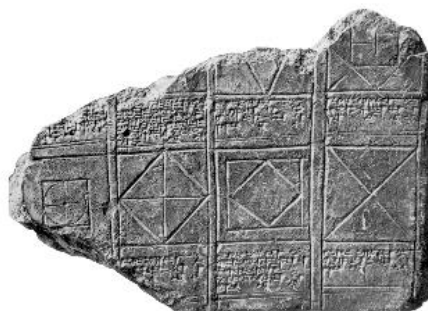


Αν και η ναυαρχίδα της θεωρίας του Πυθαγόρα είναι η τετρακτύς, το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι αυτό που τον καθιέρωσε στο χώρο των μαθηματικών και χάριν αυτού είναι γνωστός στους περισσότερους ανθρώπους σήμερα. Το

Πυθαγόρειο θεώρημα μελετά τη σχέση ανάμεσα στις πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου και αποτελεί θεώρημα της επιπέδου Ευκλείδειας γεωμετρίας. Το Πυθαγόρειο θεώρημα ονομάζεται και «Εκατόμβη» ή «Θεώρημα εκατόμβης» γιατί σύμφωνα με την παράδοση ο Πυθαγόρας μόλις το διατύπωσε προσέφερε θυσίες στους θεούς.

Ιστορική επισκόπηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Ένα από τα πιο συναρπαστικά και ασφαλώς πιο φημισμένα και χρήσιμα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το λεγόμενο Πυθαγόρειο Θεώρημα, που λέει ότι «σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτεινούσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών». Αν υπάρχει ένα θεώρημα του οποίου η γέννηση δικαιούται να θεωρηθεί μια μεγάλη στιγμή στα μαθηματικά, τότε το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι το πιο



κατάλληλο, γιατί είναι ίσως το πρώτο πραγματικά μεγάλο Θεώρημα των μαθηματικών. Όταν όμως αρχίζουμε να εξετάζουμε την προέλευση του Θεωρήματος, τότε είναι σαν να ψάχνουμε σε θολά νερά.

Αν και η παράδοση έχει αποδώσει το περίφημο θεώρημα στον Πυθαγόρα, η εξέταση πήλινων πινάκων με σφηνοειδή γραφή, που βρέθηκαν στην Μεσοποταμία τον 20ο αιώνα, αποκαλύπτει ότι οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι που έζησαν πάνω από χίλια χρόνια πριν τον Πυθαγόρα, γνώριζαν το Θεώρημα. Το θεώρημα γνώριζαν επίσης οι αρχαίοι Ινδοί και Κινέζοι της εποχής του Πυθαγόρα ή και νωρίτερα, όπως αποδεικνύεται από σχετικές εργασίες τους (Van der Waerden, 2000). Αυτές οι μη ελληνικές και πιθανόν προελληνικές αναφορές στο Θεώρημα δεν περιέχουν όμως αποδείξεις του, και ίσως είναι αλήθεια ότι ο Πυθαγόρας ή κάποιο μέλος της διάσημης αδελφότητας του ήταν ο πρώτος που έδωσε μια λογική απόδειξη στο θεώρημα.

Αν και οι ρίζες του είναι στη Γεωμετρία, το Θεώρημα που αποδίδεται παγκοσμίως στον Πυθαγόρα έχει βρει εφαρμογή σχεδόν σε κάθε κλάδο της επιστήμης, καθαρό ή εφαρμοσμένο. Ευρέως πάνω από τετρακόσιες αποδείξεις του είναι γνωστές, και ο αριθμός τους μεγαλώνει ακόμα. Ο κατάλογος περιλαμβάνει μια αρχική απόδειξη από τον μελλοντικό αμερικανό Πρόεδρο Garfield, μια άλλη από τον δωδεκάχρονο τότε Albert Einstein, από το Leonardo da Vinci, ακόμα μία από ένα νεαρό τυφλό κορίτσι, και ο κατάλογος συνεχίζεται. Μερικές από αυτές τις αποδείξεις είναι συναρπαστικές στην απλότητά τους, ενώ άλλες είναι απίστευτα σύνθετες.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

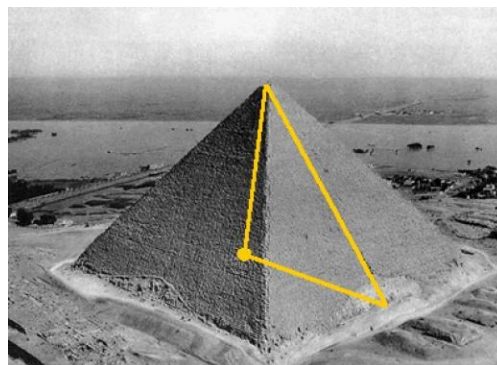
Σήμερα σκεφτόμαστε το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως αλγεβρική σχέση $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, από την οποία το μήκος μιας πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου μπορεί να βρεθεί, λαμβάνοντας υπόψη τα μήκη των άλλων δύο πλευρών. Αλλά ο Πυθαγόρας δεν την αντιλήφθηκε έτσι. Γι' αυτόν ήταν μια γεωμετρική δήλωση για τα εμβαδά. Ήταν μόνο με την ανάπτυξη της σύγχρονης άλγεβρας, περίπου το 16ο αιώνα, όταν το Θεώρημα εξοικειώθηκε στην αλγεβρική του μορφή (Heath, 1956). Είναι σημαντικό να αντέξει αυτό στο μυαλό, εάν πρόκειται να επισημάνουμε την εξέλιξη του Θεωρήματος κατά τη διάρκεια των 2.500 ετών από τότε που ο Πυθαγόρας υποθετικά το απέδειξε

πρώτος και το έκανε αθάνατο. Και δεν ήταν ούτε καν ο πρώτος που ανακάλυψε το Θεώρημα. Ήταν γνωστό στους Βαβυλώνιους και ενδεχομένως στους Κινέζους, τουλάχιστον χίλια έτη πριν από αυτόν (Van der Waerden, 2000).

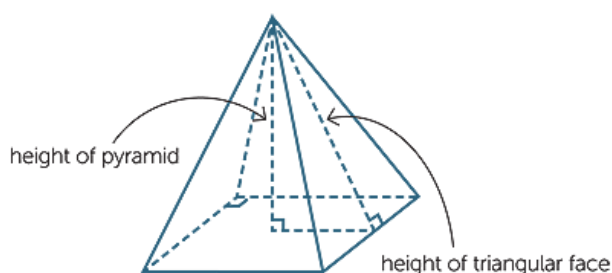
Οι Αιγύπτιοι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα

Οι Αιγύπτιοι πρέπει να έχουν χρησιμοποιήσει τον τύπο $a^2+b^2=c^2$ αλλιώς δε θα μπορούσαν να έχουν χτίσει τις πυραμίδες τους, αλλά δεν το έχουν εκφράσει ποτέ ως μία χρήσιμη θεωρία. (Joy Hakim, The Story of Science)

Ο διασημότερος όλων των αιγυπτιακών ιερών τόπων είναι οι πυραμίδες, που χτίζονται για πάνω από 1.500 έτη για να δοξάσουν τους κυβερνήτες Φαραώ κατά τη



διάρκεια των ζωών τους, και ακόμα περισσότερο μετά από τους θανάτους τους. Ένας τεράστιος όγκος της βιβλιογραφίας ήταν γραμμένος στις πυραμίδες. Δυστυχώς, ένα μεγάλο μέρος αυτής της λογοτεχνίας είναι περισσότερο μυθιστοριογραφία παρά πραγματικότητα. Οι πυραμίδες έχουν προσελκύσει ένα κοινό προσκυνητών που βρήκε σε αυτά τα μνημεία κρυφές συνδέσεις για τα πάντα στον κόσμο, από τις αριθμητικές τιμές του π μέχρι και για τη χρυσή αναλογία της ευθυγράμμισης των πλανητών και των αστεριών. Αναφέρει ο Αιγυπτιολόγος Gillings, 1982. «Συντάκτες, μυθιστοριογράφοι, δημοσιογράφοι, και συγγραφείς μυθιστορημάτων βρήκαν κατά τη διάρκεια του δέκατου ένατου αιώνα ένα νέο θέμα (τις πυραμίδες), μία νέα ιδέα αναπτύχθηκε, και αυτοί που ήξεραν λιγότερα πράγματα και δεν κατανοούσαν καθαρά το θέμα, θα μπορούσαν πιο ελεύθερα να δώσουν τα ηνία στη φαντασία τους».



Οι Δακανάλης και Θεοδοσίου αναφέρουν ότι ο Legon μελέτησε εκτενώς και επέκτεινε την πρώτη τοπογραφική μελέτη που έγινε στην Γκίζα από τον W.M.F. Petrie

(1883). Τα αποτελέσματα της εργασίας του Legon έχουν δημοσιευθεί στα περιοδικά

της Αρχαιολογικής κοινότητας, Discussions in Egyptology και στο Gottinger Miszellen. Οι τρεις πυραμίδες στην Γκίζα περιγράφονται με ένα ορθογώνιο με πλευρές $1000\sqrt{2}$ και $1000\sqrt{3}$. Ο Legon παρατήρησε ότι η τετραγωνική ρίζα χρησιμοποιήθηκε εκτενώς από τους κτίστες, γεγονός που δεν προκαλεί έκπληξη, διότι είναι γενικά αποδεκτό πως οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι τη γνώριζαν. Ο τρόπος όμως με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε στο όλο σχέδιο, προτείνει τη γνώση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Βεβαίως, χτίζοντας ένα τέτοιο τεράστιο μνημείο όπως είναι η μεγάλη πυραμίδα του Χέοπα – 756 πόδια η κάθε πλευρά και το ύψος να αγγίζει τα 481 πόδια, απαιτεί πολλή μαθηματική γνώση, και σίγουρα αυτή η γνώση πρέπει να περιλαμβάνει το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Αλλά το ήξεραν;

Υπάρχουν αρχεία, όπως ο πάπυρος Berlin 6619 που χρονολογείται περίπου στο



1850 π.Χ., που παρουσιάζει τη γνώση των Πυθαγορείων τριάδων από τους Αιγυπτίους. Εντούτοις, κανένα τρίγωνο δεν αναφέρεται εδώ ή

κάπου αλλού. Ο Van der Waerden (2000) προτείνει ότι οι Αιγύπτιοι μπορεί να είχαν μάθει για τις Πυθαγόρειες τριάδες από τους Βαβυλώνιους. Υπέρ αυτής της άποψης, οι Boyer & Merzbach (1991) έγραψαν: «συχνά λέγεται ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν εξοικειωμένοι με τις Πυθαγόρειο Θεώρημα, αλλά δεν υπάρχει κανένας υπαινιγμός αυτού στους παπύρους που έχουν έρθει στα χέρια μας».

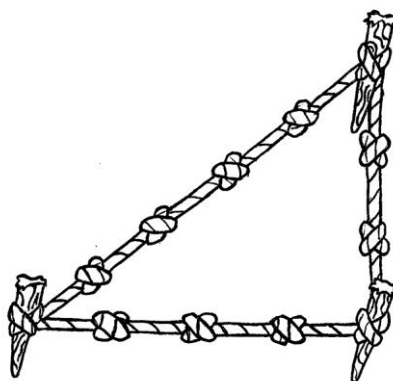
Η κύρια πηγή πληροφοριών για τα αρχαία Αιγυπτιακά μαθηματικά προέρχεται από τον πάπυρο Rhind, μια συλλογή από ογδόντα τέσσερα προβλήματα που ασχολούνται με την αριθμητική, τη γεωμετρία και τη στοιχειώδη άλγεβρα. Ανακαλύφθηκε το 1858 από τον Σκωτσέζο Αιγυπτιολόγο A. Henry Rhind. Έχει 18

πόδια μήκος και 13 ίντσες πλάτος. Επέζησε κάτω από εντυπωσιακά καλές συνθήκες και είναι το παλαιότερο εγχειρίδιο μαθηματικών που έφθασε σε μας σχεδόν άθικτο (τώρα βρίσκεται στο βρετανικό μουσείο στο Λονδίνο).

Ο πάπυρος γράφτηκε περίπου το 1650 π.Χ. από έναν γραφέα που ονομαζόταν Α΄h-mose, όνομα γνωστότερο στη δύση ως Ahmes. Αλλά δεν ήταν δική του εργασία (Van der Waerden, 2000) δεδομένου ότι ο Α΄h-mose μας λέει ότι το αντέγραψε από ένα παλαιότερο έγγραφο που χρονολογείται περίπου το 1800 π.Χ. Κάθε ένα από τα ογδόντα τέσσερα προβλήματα ακολουθείται από μια λεπτομερή λύση βήμα προς βήμα. Επίσης, μερικά από τα προβλήματα συνοδεύονται από σχέδια. Πιθανότατα η εργασία ήταν ένα εγχειρίδιο κατάρτισης για χρήση σε κάποιο σχολείο γραφέων. Για αυτόν το λόγο υπήρχε η αίρεση των βασιλικών γραφέων στους οποίους όλοι οι λογοτεχνικοί στόχοι ήταν ορισμένοι. Ανάγνωση, γραφή και αριθμητική, τα σύγχρονα σε μας «τρία Ρ».

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα κινεζικά μαθηματικά

Απαντάται για πρώτη φορά στην «Μαθηματική πραγματεία για τον γνώμονα», το αρχαιότερο κείμενο που σώζεται στην ιστορία των Κινεζικών μαθηματικών. Το έργο αυτό είναι γραμμένο με μορφή διαλόγου ανάμεσα στον κυβερνήτη Ζόου και το σοφό Σανγκ Γκάο, ο οποίος θεωρείτο ως «εξαιρετικά επιδέξιος στους υπολογισμούς»,

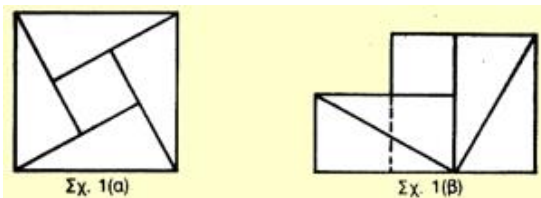


και ανάμεσα στον Τσένζι και τον μαθητή Ρονγκ Φανγκ. Σύμφωνα με την μαρτυρία αυτή, η σχέση μεταξύ των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου, με πλευρές 3, 4, 5, ήταν γνωστή στον Σανγκ Γκάο, ήδη από τον 12ο αι. π.Χ., ίσως και πιο πριν.

Στην ίδια πραγματεία αναφέρεται ότι «το ορθογώνιο που είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο διαιρείται σε δύο τρίγωνα με πλευρές 3, 4, 5 (στο παρακάτω σχήμα)». Η ιδιότητα επομένως της γωνίας που βαίνει σε διάμετρο, η οποία αποδίδεται στον Θαλή από τον Πρόκλο, ήταν ήδη γνωστή στον Σανγκ Γκάο. Στο τέλος του έργου αυτού αναφέρεται επίσης ότι «οι επιφάνειες των δύο τετραγώνων που

κατασκευάζονται στις δύο καθέτους έχουν άθροισμα είκοσι και πέντε, το οποίο είναι η επιφάνεια του τετραγώνου που κατασκευάζεται στην υποτείνουσα του τριγώνου».

Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα Ινδικά μαθηματικά



Απαντάται στα θρησκευτικής και φιλοσοφικής σημασίας έργα «Σουλβασούτρας» που περιέχουν γεωμετρικές κατασκευές και υπολογισμούς που χρησιμοποιούνταν για την κατασκευή βωμών και τον προσανατολισμό των ναών.

Πηγή:

<http://www.math.uoc.gr/~jplatis/pythagoras.pdf>